

電気磁気学Ⅰ及び演習 平成30年度実力試験Ⅰ (実施日：2018年5月7日)

(注)・答だけでなく計算過程を記述すること。

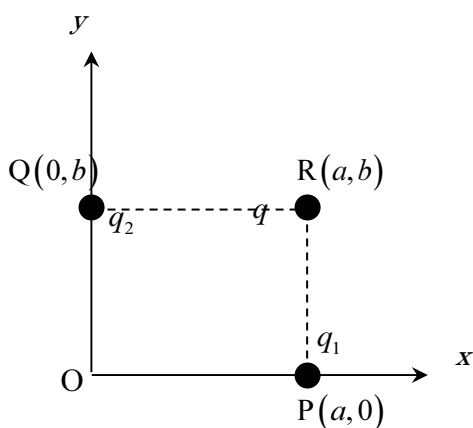
・クーロン定数 $k=1/(4\pi\epsilon_0)$ を用いてよい。

・問題1、2、3、4をそれぞれ別の解答用紙に解答すること。裏面を用いてよい。

問題1 xy 平面上の点 $P(a,0)$ に点電荷 q_1 、点 $Q(0,b)$ に点電荷 q_2 、点 $R(a,b)$ に点電荷 q が置かれている。次の小問に答えよ。(25点)

- 1) q_1 が q に作用する力を $\mathbf{F}_1 = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j}$ としたとき、 F_{1x} 、 F_{1y} を求めよ。
- 2) q_2 が q に作用する力を $\mathbf{F}_2 = F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j}$ としたとき、 F_{2x} 、 F_{2y} を求めよ。
- 3) q に作用する合力を $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$ としたとき、 F_x 、 F_y を求めよ。
- 4) q_1 が q_2 に作用する力を $\mathbf{F}_{21}$ としたとき、力の大きさ $F_{21} \equiv |\mathbf{F}_{21}|$ を求めよ。

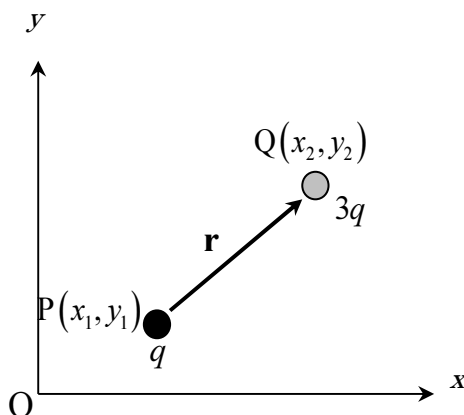
問題1の説明図



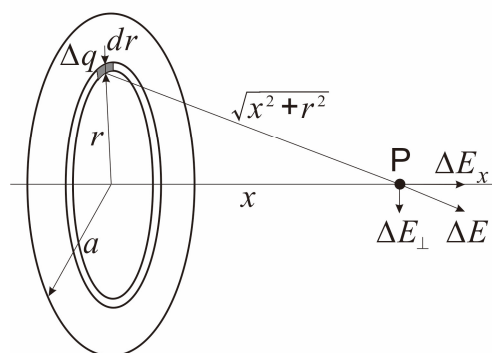
問題2 xy 平面上の点 $P(x_1, y_1)$ に正の点電荷 q 、点 $Q(x_2, y_2)$ に正の点電荷 $3q$ を置いた。以下の小問に答えよ。ただし、 x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする。

- 1) 点 P から点 Q に向かう位置ベクトル $\mathbf{r}$ をベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて表せ。
- 2) 位置ベクトル $\mathbf{r}$ の単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ をベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて表せ。
- 3) 点 P の正電荷 q が点 Q の位置につくる電場 $\mathbf{E}$ をベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて表せ。
- 4) 点電荷 q と $3q$ との間にはたらく力の大きさ $F \equiv |\mathbf{F}|$ を求めよ。

問題2の説明図



問題 3 図に示すような一様に帯電した半径 a の十分に薄い円板がつくる電場を求めたい。そこで、まず、円板内に細いリング状の領域を考える。以下の小問に答えよ。



- 1) リングの半径を r とするとき、リング上の微小な領域の電荷 Δq がリングの中心軸上の点 P (リングからの距離 x) につくる電場 ΔE の x 成分 ΔE_x を求めよ。

- 2) リングの幅を dr とするとき、リング全体の電

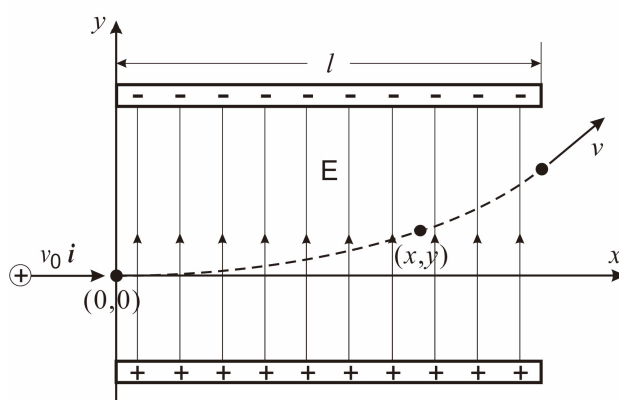
荷 $dq = \int \Delta q$ を求めよ。ただし、円板の面電荷

問題 3 の説明図

密度を σ とする。

- 3) リングの全電荷 dq が P 点につくる電場は x 軸に垂直な成分は相殺し、 x 軸成分だけの足し合わせとして求められる。その大きさ dE を求めよ。
- 4) 3) で求めた電場 dE を円板全体にわたって積分して円板全体の電荷が P 点につくる電場 E を求めよ。

問題 4 図に示すように、幅 l の平行板電極内に一様につくられた電場 (y の正方向 ($\mathbf{E} = E\mathbf{j}$)) に陽子 (e) が $t=0$ で水平方向 (x の正方向) に初期速度 v_0 で打ち込まれたとする。以下の小問に答えよ。



問題 4 の説明図

- 1) 陽子には電場により電気力が働くが、陽子の質量を m として、電気力による陽子の加速度の大きさと方向を答えよ。
- 2) 陽子が打ち込まれてから t 秒後の電場内の陽子の速度の x 成分 v_x と y 成分 v_y を求めよ。
- 3) 陽子は電場の出口面 ($x=l$) では y 方向にどれだけ変位するか。
- 4) 陽子が電場の出口面 ($x=l$) から出るときの速さ v を求めよ。

電気磁気学 I 及び演習 平成 30 年度実力試験 I の略解 (2018 年 5 月 7 日)

問題 1 (25 点)

- 1) $\mathbf{r}_1 = b\mathbf{j}, r_1 = b$ より、 $\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} \mathbf{r}_1 = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \mathbf{j}$. ゆえに、 $F_{1x} = 0, F_{1y} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 b^2}$. (6 点)
- 2) $\mathbf{r}_2 = a\mathbf{i}, r_2 = a$ より、 $\mathbf{F}_2 = \frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} \mathbf{r}_2 = \frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{i}$. ゆえに、 $F_{2x} = \frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0 a^2}, F_{2y} = 0$. (6 点)
- 3) $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \mathbf{j} + \frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{i}$. ゆえに、 $F_x = \frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0 a^2}, F_y = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 b^2}$. (6 点)
- 4) $F_{21} = 3/2$. ここで $r_{21} = \sqrt{a^2 + b^2}$. よって、 $F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + b^2)}$. (7 点)

問題 2 (25 点)

- 1) $\mathbf{r} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$ (6 点)
- 2) $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}| = \frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$ (6 点)
- 3) $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \dot{\mathbf{r}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}}{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]^{3/2}}$ (6 点)
- 4) $\mathbf{F} = 3q\mathbf{E}$. したがって、 $F = 3qE = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (7 点)

問題3 (25 点)

1) Δq が P につくる電場の大きさは $\Delta E = k \frac{\Delta q}{(x^2 + r^2)}$

ΔE の x 成分 ΔE_x は $\Delta E_x = \Delta E \cos \theta = k \frac{\Delta q}{(x^2 + r^2)} \cdot \frac{x}{(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{kx\Delta q}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$ (7 点)

2) リング全体の面積は $2\pi r \cdot dr$ 。したがって、リング全体の電荷は $dq = 2\pi r \cdot dr \cdot \sigma$ 。(6 点)

3) リング全体がつくる電場 dE は $dE = \sum_i k \frac{x\Delta q_i}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = k \frac{x \sum_i \Delta q_i}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi\sigma x k r dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$ (6 点)

点)

4) 円板全体のつくる電場 E は

$$E = 2\pi\sigma x k \int_0^a \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\sigma x k \left[-\left(x^2 + r^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^a = 2\pi\sigma x k \left\{ \left(x^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$= 2\pi\sigma k \left\{ \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x} \right\}$$
 (6 点)

問題4 (25 点)

1) 加速度と力の関係 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 及び電場が電荷に及ぼす力の関係 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ から、陽子の電荷を e として $ma = eE$ 。したがって、陽子の加速度は y の正方向に一定の大きさ $a = \frac{eE}{m}$ 。(7 点)

2) 陽子は水平方向 (x の正方向) に撃ち込まれるので初期速度は $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$ 。
 加速度は y の正方向のみなので、陽子は x 方向には等速運動、 y 方向には等加速度運動するので、 t 秒後の速度は $v_x = v_{0x} + at = v_0$, $v_y = v_{0y} + at = \frac{eE}{m} t$ 。(6 点)

3) 陽子は x 方向には v_0 で等速運動。したがって電極を通過するのに要する時間は $t = \frac{l}{v_0}$ 。

電極の出口面での y 方向の変位は $y = v_{0y}t + at^2 = \frac{eE}{2m} t^2$ を積分して

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} a \left(\frac{l}{v_0} \right)^2 = \frac{eEl^2}{2mv_0^2} \quad (6 \text{ 点})$$

4) 陽子が電場を通過するのに要する時間は $t = \frac{l}{v_0}$ 。

電極の出口面での速度 x 成分及び y 成分は $v_x = v_0$, $v_y = v_{0y} + at = \frac{eE}{m} t = \frac{eEl}{mv_0}$ 。

$$\text{よって、速さは } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eEl}{mv_0} \right)^2} \quad (6 \text{ 点})$$