

電気磁気学 I 及び演習 平成 30 年度 実力試験 II 試験問題 (5 月 30 日)

(注 1) 答だけでなく、計算過程を必ず記述すること。

(注 2) クーロン定数 $k \equiv 1/4\pi\epsilon_0$ を用いてもよい。

(注 3) 問題 1, 2, 3, 4 をそれぞれ別々の解答用紙に解答すること。裏面を用いて良い。

問題 1 図 1 に示すように、半径 a の絶縁体球に体積密度 ρ で電荷が一様に分布している。ガウスの法則を用いて球の中心から距離 r 離れた点における電場の大きさ E を求めたい。以下の小問に答えよ。

(25 点)

- (1) 絶縁体球の総電荷量 Q を求めよ。
- (2) 球内の領域 $r < a$ における電場の大きさ E を求めよ。
また、このとき、どのようにガウス面を取るか答えよ。
- (3) 球外の領域 $r > a$ における電場の大きさ E を求めよ。
- (4) (2)、(3) で求めた電場の r に対する分布を図示せよ。

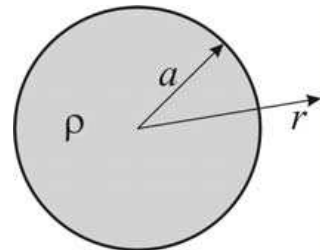


図 1

問題 2 十分に広い平面に電荷が一様に分布しているとき、ガウスの法則を用いて電場を求めたい。 x, y, z 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ として以下の問に答えよ。(25 点)

まず、図 2-1 に示すように、 $z=0$ の一つの平面に電荷が面電荷密度 σ で分布しているとき、

- (1) $z < 0$ 、および、 $z > 0$ における電場 $\mathbf{E}$ (ベクトル) を求めよ。

次に、図 2-2 に示すように、 $z=a$ の平面に電荷が面電荷密度 σ で、 $z=-a$ の平面に電荷が面電荷密度 $-\sigma$ で分布しているとき、

- (2) $a < z$ における電場 $\mathbf{E}$ (ベクトル) を求めよ。
- (3) $-a < z < a$ における電場 $\mathbf{E}$ (ベクトル) を求めよ。
- (4) $z < -a$ における電場 $\mathbf{E}$ (ベクトル) を求めよ。

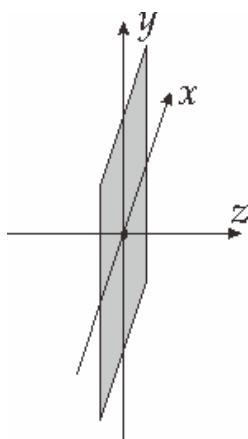


図 2-1

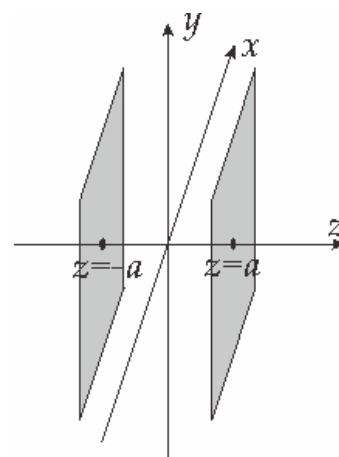
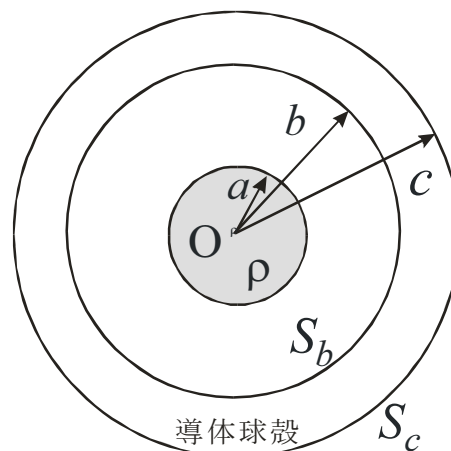


図 2-2

問題 3 図 3 に示すように、半径 a の絶縁体球に電荷 Q が体積密度 ρ で一様に分布しており、それと同心の電荷を持たない導体球殻が置かれている。その導体球殻の内半径は b 、外半径は c である。以下の小問に答えよ。(25 点)

- (1) $r < a$ の空間内の電場の大きさ E を求めよ。
- (2) $a < r < b$ の空間内の電場の大きさ E を求めよ。
- (3) $b < r < c$ の空間内の電場の大きさ E を求めよ。
- (4) $r > c$ の空間内の電場の大きさ E を求めよ。



問題 4 図 4-1 のように半径 r の球の中心に点電荷 Q がある。以下の問いに答えよ。(25 点)

- (1) 図 4-1 のような半頂角 θ の円形キャップの周長を r と θ から求めよ。
- (2) 図 4-2 のように球面を半頂角 θ , 幅 $rd\theta$ で水平に輪切りにした円環の面積 dS を求めよ。
- (3) (2) の結果を θ に関して 0 から θ まで積分し、球の全面積と比較することで、半頂角 θ の円形

のキャップを通過する電束が $\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}(1 - \cos\theta)$ となることを示せ。

- (4) 半頂角 θ の円形のキャップを通過する電束が全電束の $1/4$ の場合の θ を求めよ。

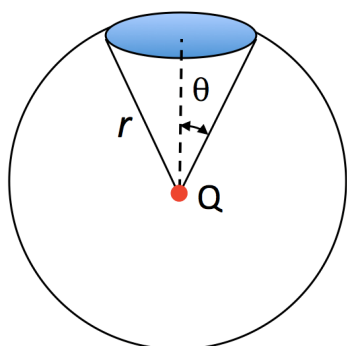


図 4-1 点電荷を中心とする球面の半頂角 θ の円形キャップ

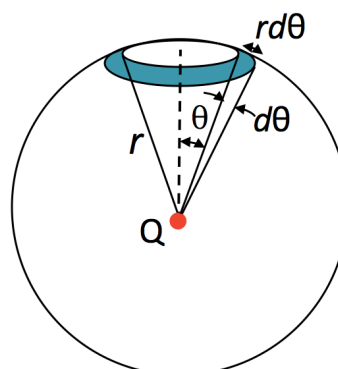


図 4-2 球面を半頂角 θ , 幅 $rd\theta$ で水平に輪切りにした円環

電気磁気学Ⅰ及び演習 平成30年度実力試験Ⅱ（5月30日）の解答例

問題1 (25点)

(1) 絶縁体球の体積は $\frac{4\pi a^3}{3}$ なので、絶縁体球の総電荷量は $Q = \frac{4\pi a^3}{3} \rho$ 。(5点)

(2) 半径 r の同心球面をガウス面 S とする。問題が球対称であるので、電場は S の上では一定で垂直外向き（放射方向）である。(4点)

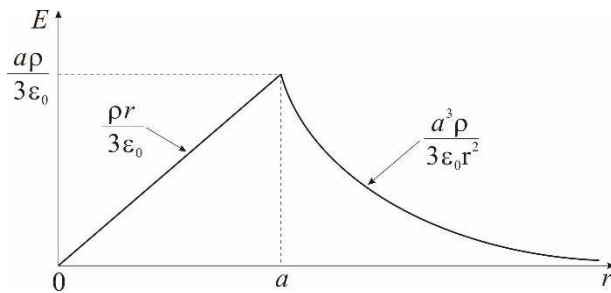
ガウスの法則 $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$ を用いると、ガウス面内の電荷は $q_{in} = \frac{4\pi r^3}{3} \rho$ なので、 $4\pi r^2 E = \frac{4\pi r^3}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 。

$$\therefore E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (4点)$$

(3) $r > a$ の同心球面をガウス面としてガウスの法則を適用すると $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ なので、 $4\pi r^2 E = \frac{4\pi a^3}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 。

$$\therefore E = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \quad (6点)$$

(4) (6点)



問題2 (25点)

(1) ガウス面として、平面の両側に延び、平面に平行な二つの円形の底面もつ直円筒を考える。直円筒の底面の面積をそれぞれ A とすると、右底面から出る電束 $\Phi_1 = EA$ 、左底面から出る電束 $\Phi_2 = EA$ 、側面から出る電束 $\Phi_3 = 0$ なので、ガウスの法則より、 $2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$ 。 $\therefore$ 電場の大きさ $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ 。 よって、

$$z > 0, E = Ek = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k}, \quad (5点) \quad \text{また、} \quad z < 0, E = -Ek = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k}. \quad (5点)$$

(2) ガウス面 S として両平面の両側に延び、平面に平行な二つの円形の底面もつ直円筒を考える。直円筒の底面の面積をそれぞれ A とし、ガウスの法則を適用すると、 $z = a$ の面電荷による電場は、 $z > a$ のとき、

$$\mathbf{E} = Ek = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k}, \quad z < a \text{ のとき, } \mathbf{E} = -Ek = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k}.$$

$$z = -a \text{ の面電荷による電場は, } z > -a \text{ のとき, } \mathbf{E} = -Ek = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k}, \quad z < -a \text{ のとき, } \mathbf{E} = Ek = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k}.$$

$$\text{したがって、電場の重ね合わせの原理から } z > a \text{ のとき, } \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k} = 0. \quad (5点)$$

$$(3) (2) \text{ の結果を用いて、} -a < z < a \text{ のとき, } \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{k}. \quad (5点)$$

$$(4) (2) \text{ の結果を用いて、} z < -a \text{ のとき, } \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k} = 0. \quad (5点)$$

問題 3 (25 点)

(1) $r < a$ のとき, 半径 r の球面をガウス面 S とする。ガウスの法則より,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi r^2 E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \rho \frac{4\pi r^3}{3\epsilon_0}, \quad \text{ゆえに, } E = \rho \frac{r}{3\epsilon_0} \quad (10 \text{ 点})$$

(2) $a < r < b$ のとき, ガウスの法則より, $4\pi r^2 E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, 　ゆえに, $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (5 点)

(3) $b < r < c$ のとき, 導体内なので $E=0$ (5 点)

(4) $r > c$ のとき, ガウスの法則より, $4\pi r^2 E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, 　ゆえに, $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (5 点)

問題 4 図 4-1 のように半径 r の球の中心に点電荷 Q がある。

(1) 図 4-1 のような半頂角 θ の円形キャップの周長を r と θ から求めよ。 (5 点)

解答例: $2\pi r \sin\theta$

(2) 図 4-2 のように球面を半頂角 θ , 幅 $r d\theta$ で水平に輪切りにした円環の面積 dS を求めよ。

(5 点)

解答例: $dS = 2\pi r \sin\theta r d\theta = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$

(3) (2) の結果を θ に関して 0 から θ まで積分し、球の全面積と比較することで、半頂角 θ の円形

のキャップを通過する電束が $\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}(1 - \cos\theta)$ となることを示せ。 (5 点)

解答例:

$$dS' = 2\pi r \sin\theta \cdot r d\theta$$

$$S' = \int_0^\theta 2\pi r^2 \sin\theta' d\theta' = 2\pi r^2 [-\cos\theta']_0^\theta = 2\pi r^2 (1 - \cos\theta)$$

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{S'}{S_{\text{sphere}}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi r^2 (1 - \cos\theta)}{4\pi r^2} = \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\theta)$$

$$\therefore \Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\theta)$$

(4) 半頂角 θ の円形のキャップを通過する電束が全電束の 1/4 の場合の θ を求めよ。 (10 点)

解答例:

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\theta) / \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{(1 - \cos\theta)}{2} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$0 < \theta < \pi, \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$