

(注1) 答だけでなく、計算過程を必ず記述すること。なお、電卓の使用は認めない。

(注2) クーロン定数 $k \equiv 1/4\pi\epsilon_0 = 9.0 \times 10^9 [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2]$ を用いても良い。

(注3) 問題1, 2, 3, 4をそれぞれ別々の解答用紙に解答すること。裏面を用いても良い。

(注4) 各問題25点、全100点満点。解答時間80分

問題1 図1に示すように、 xy 平面の原点 O に正電荷 q_1 がある。無限遠点の電位を0として、以下の小問に答えよ。

- (1) 原点 O にある正電荷 q_1 が点 P と点 Q につくる電位を求めよ。
- (2) 原点 O に電荷 q_1 がある状態で、正電荷 q_2 を無限遠点から点 P まで運ぶのに必要な仕事 W_1 を求めよ。
- (3) 原点 O に正電荷 q_1 、点 P に正電荷 q_2 がある状態で、負電荷 $-q_3$ を無限遠点から点 Q まで運ぶのに必要な仕事 W_2 を求めよ。
- (4) 原点 O 、点 P 、点 Q にある3電荷 $q_1, q_2, -q_3$ の全ポテンシャルエネルギー U を求めよ。

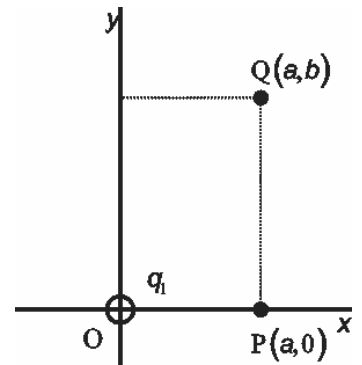


図1 電荷配置図

問題2 図2のような電気双極子、図3のような線形四極子に関して、無限遠点の電位を0として、以下の問いに答えよ。

- (1) 図2、図3において $x > a$ の時、 x 軸上の点 P の厳密な電位の式を求めよ。
- (2) 図2において $x \gg a$ の時、 x 軸上にある点 P の電場の近似式を求めよ。
- (3) 図3において $x \gg a$ の時、 x 軸上にある点 P の電場の近似式を求めよ。
- (4) 図3において $x = 3.0a$ の時、 x 軸上にある点 P の電位を求めよ。ただし、 $a = 2.0 \text{ mm}$ 、 $q = 3.0 \mu\text{C}$ とする。

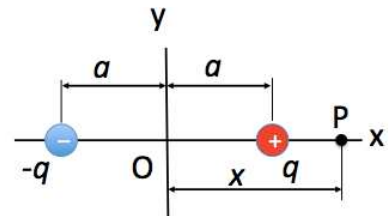


図2 電気双極子

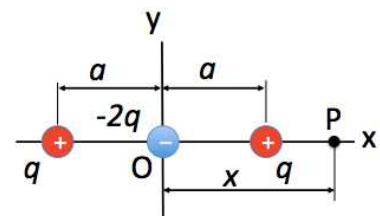


図3 線形四極子

問題3 図2に示すように、中心に半径 a の丸い穴の開いた一様に帯電した半径 b の円板がある。円板の面電荷密度を σ として、以下の小問に答えよ。

- (1) 円板内に半径 r で微小な幅 dr のリングを考える。このリング上の微小な領域(電荷 dq)が中心軸上の P 点(リング中心からの距離 x)につくる電位 dV_P を求めよ。
- (2) 半径 r で微小な幅 dr のリングの全電荷が P 点につくる電位 V_P を求めよ。また、その結果から円板の中心($x=0$)における電位 $V_P(0)$ を求めよ。
- (3) 半径 $a \sim b$ の円板の全電荷が P 点につくる電位 V を求めよ。
- (4) (3)の結果を用いて、電位と電場の関係から P 点における電場の x 成分 E_x を求めよ。また、その結果から円板の中心($x=0$)における電場の大きさ $E_x(0)$ を求めよ。

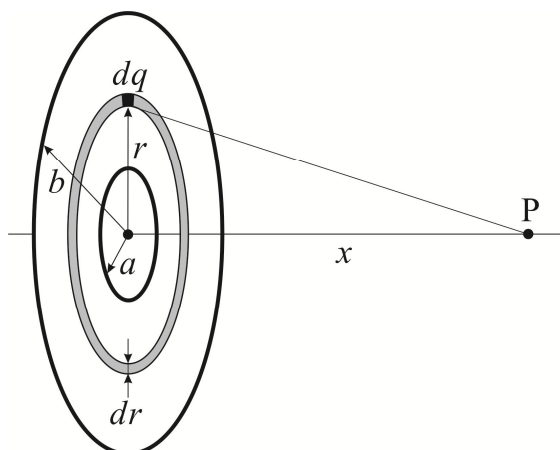


図4 穴の開いた絶縁体円板

問題4 図4に示すように、半径 R の絶縁体の球が一様な正の体積電荷密度 ρ で帯電している。無限遠の電位を 0 として以下の小問に答えよ。

- (1) 絶縁体球の外部($r > R$)、および、内部($r < R$)の電場の大きさ E をガウスの法則を使って求めよ。
- (2) 絶縁体球の外部($r > R$)の電位 V_B 、および、絶縁体球表面の電位 V_C を求めよ。
- (3) 絶縁体球の内部($r < R$)の電位 V_D を求めよ。また、導体球の中心($r=0$)における電位 $V_D(0)$ を求めよ。
- (4) (3)の結果の電位を微分して電場を求め、導体球の中心($r=0$)における電場の大きさ $E(0)$ を求めよ。

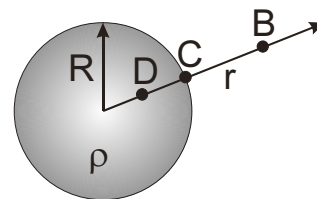


図4

電気磁気学 I 及び演習 実力試験 III の解答例 (6 月 21 日)

問題 1 (25 点)

(1) P の電位 $V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a}$, Q の電位 $V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2}}$. (5 点 $\times 2 = 10$ 点)

(2) $W_1 = q_2 V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a}$. (5 点)

(3) $W_2 = -q_3 V = \frac{-q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{-q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 b}$. (5 点)

(4) $U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 b}$. (10 点)

問題 2 (25 点)

(1) 電気双極子が点 P につくる電位 $V_b = k \left(\frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \frac{2kqa}{x^2 - a^2}$ (5 点)

線形四極子が点 P につくる電位

$$V_q = k \left(\frac{q}{x-a} - \frac{2q}{x} + \frac{q}{x+a} \right) = kq \frac{x^2 + ax - 2(x^2 - a^2) + x^2 - ax}{x(x^2 - a^2)} = \frac{2kqa^2}{x(x^2 - a^2)} \quad (5 \text{ 点})$$

(2) 電気双極子が点 P につくる電位は $x \gg a$ では(1)より、 $V_b = \frac{2kqa}{x^2 - a^2} \approx \frac{2kqa}{x^2}$ 。

電場は電位の微分に負符号をつければ求まり、 $E = -\frac{dV_b}{dx} \approx -\frac{d}{dx} \left(\frac{2kqa}{x^2} \right) = \frac{4kqa}{x^3}$ (5 点)

(3) 線形四極子が点 P につくる電位は $x \gg a$ では下記のように簡単化される。

$$V_q = \frac{2kqa^2}{x(x^2 - a^2)} \approx \frac{2kqa^2}{x^3}$$

電場は電位の微分に負符号をつければ求まり、 $E = -\frac{dV_q}{dx} \approx -\frac{d}{dx} \left(\frac{2kqa^2}{x^3} \right) = \frac{6kqa^2}{x^4}$ (5 点)

(4) 図 3 において $x = 3.0a$, $a = 2.0 \text{ mm}$, $q = 3.0 \mu\text{C}$ の時、 x 軸上にある点 P の電位は、

$$V_q = \frac{2kqa^2}{x(x^2 - a^2)} = \frac{2kqa^2}{3a(9a^2 - a^2)} = \frac{kq}{12a} = \frac{9.0 \times 10^9 \times 3.0 \times 10^{-6}}{12 \times 2.0 \times 10^{-3}} = 1.1 \times 10^6 \text{ [V]} \quad (5 \text{ 点})$$

問題3 (25 点)

(1) dq から P 点までの距離が $r = \sqrt{r^2 + x^2}$ なので、電位は $dV_P = k \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}}$ (5 点)

(2) リングの全電荷は $2\pi r d\sigma$ なので、リングがつくる電位は $V_P = \frac{k}{\sqrt{r^2 + x^2}} \int dq = \frac{2\pi k \sigma r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$ (4 点)

中心での電位は $x=0$ より、 $V_P(0) = \frac{2\pi k \sigma r dr}{r} = 2\pi k \sigma dr$ (3 点)

(3) 半径 $a \sim b$ の円板が P につくる電位は

$$V = \int_a^b \frac{2\pi k \sigma r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr = 2\pi k \sigma \int_a^b (r^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} r dr = 2\pi k \sigma \left[(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \right]_a^b = 2\pi k \sigma \left\{ (x^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} - (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

(6 点)

(4) P 点の電場は

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k \sigma \frac{d}{dx} \left\{ (x^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} - (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \right\} = 2\pi k \sigma x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$
 (4 点)

円板の中心での電場は $x=0$ より、 $E_x(0) = 0$ (3 点)

問題4 (25 点)

(1) 全電荷は $Q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$ なので、 $r > R$ のとき、ガウスの法則より $4\pi r^2 E = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0}$

$\therefore E = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}$ 。(3 点) $r < R$ のとき、ガウスの法則より $4\pi r^2 E = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} \therefore E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ (3 点)

(2) $r > R$ のとき、 $V_B - V_\infty = -\int_\infty^r E dr = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_\infty^r \frac{1}{r^2} dr = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left[-r^{-1} \right]_\infty^r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$ (4 点)

したがって、 $V_C = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$ (3 点)

(3) $r < R$ のとき、 $V_D - V_C = -\int_R^r E dr = -\int_R^r \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2)$

したがって、 $V_D = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2) + V_C = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2) + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$ (4 点)

また、 $V_D(0) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$ (3 点)

(4) 電場の大きさは

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr} \left\{ \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \right\} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

したがって、 $E_{r=0} = 0$ (5 点)