

注意事項：

- ・各問題 25 点、全 100 点満点、解答時間 80 分
- ・答には必ず計算過程を記述すること。
- ・問題ごとに別々の答案用紙に記入すること。ただし、答案用紙の裏も使用可能。

問題 1 図 1(a)に示すように面積 A 、間隔 x の極板に $+Q_0$ 、 $-Q_0$ の電荷が帯電している平行板コンデンサーが真空中（誘電率 ϵ_0 ）におかれている。端効果は無視して以下の問に答えよ。

(1) 平行板コンデンサーの容量 C_0 を求めよ。

(2) 極板間に働く力 F の大きさを求めよ。

ここで、図 1(b)のように誘電体を挿入する。

(3) 誘電体を入れたときの平行板コンデンサーの容量 C を求めよ。

(4) 誘電体を入れたときの平行板コンデンサーに蓄えられる電気的エネルギー U を求めよ。また、この電気的エネルギーは誘電体を挟むことによってどのように変化するか答えよ。

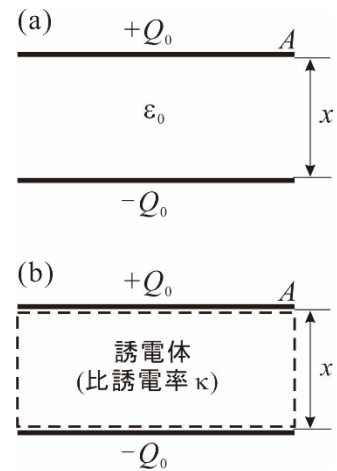


図 1 問題 1 の説明図

問題 2 図 2 に示すように容量の異なる 3 つのコンデンサー C_1, C_2, C_3 ($C_1 = 2C, C_2 = 3C, C_3 = 6C$) からなる回路があり、 C_1 にのみ電荷 Q_0 が与えられている。ここでスイッチ S を閉じると電荷の移動が起こり、最終的にコンデンサー C_1, C_2, C_3 の電荷がそれぞれ Q_1, Q_2, Q_3 となった。スイッチ S を閉じた後の以下の問いに答えよ。(25 点)

(1) コンデンサー C_1, C_2, C_3 の電荷 Q_1, Q_2, Q_3 を求めよ。

(2) コンデンサー C_1, C_2, C_3 の電位差 V_1, V_2, V_3 を求めよ。

(3) コンデンサー C_1, C_2, C_3 に蓄えられる全エネルギーを U 、スイッチ S を閉じる前にコンデンサー C_1 に蓄えられていたエネルギーを U_0 とするとき、比 U/U_0 を求めよ。

(4) (3) の比 U/U_0 は 1 に比べて大きい小さいかをのべよ。またその理由を説明せよ。

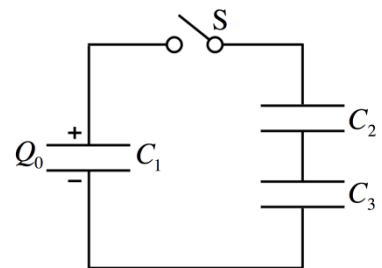


図 2 問題 2 の説明図

問題 3

図 3 に示すように面積 $l \times l$ の正方形極板の間隔が d である孤立した平板コンデンサーに厚さ d の誘電体（面積： $l \times l$ 、誘電率 $\kappa \epsilon_0$ ）が x だけ挿入されている。誘電体のない領域の誘電率を ϵ_0 とし、コンデンサーの端効果を無視して以下の問に答えよ。（25 点）

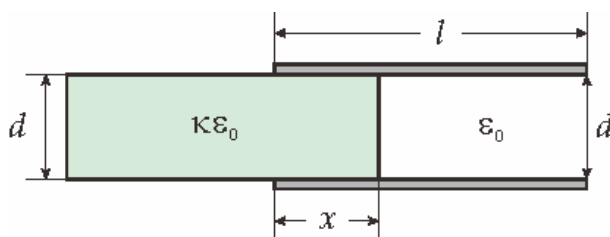


図 3 部分的に誘電体が挿入された平板コンデンサ

- (1) コンデンサーの誘電体が挿入されている部分に蓄えられている電荷を Q_1 、誘電体が挿入されていない部分に蓄えられている電荷を Q_2 として、 Q_1/Q_2 を求めよ。（7 点）
- (2) コンデンサー全体の容量 C を $d, l, x, \kappa, \epsilon_0$ を用いて表せ。（6 点）
- (3) コンデンサーに蓄えられている全電荷を $Q = Q_1 + Q_2$ と置き、コンデンサーに蓄積された電氣的エネルギー U を $Q, d, l, x, \kappa, \epsilon_0$ を用いて表せ。（6 点）
- (4) コンデンサーに蓄積された電氣的エネルギー U を x で微分して負号を付けて、誘電体に働く力と方向を求めよ。（方向は引き込まれる方向か押し出される方向か明記せよ。）（6 点）

問題 4 電気抵抗および抵抗率に関して、以下の問に答えよ。（25 点）

- (1) 導体の抵抗率の温度依存性は次式で表される。 $\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ ここで α は抵抗率の温度係数であり、白金の 20.0°C の抵抗率は $1.05 \times 10^{-7} \Omega\text{m}$ 、抵抗率の温度係数は $3.92 \times 10^{-3} (^\circ\text{C})^{-1}$ とする。今、 20.0°C で 50.0Ω の抵抗を有する白金で作った抵抗温度計がある。これを融解しつつある金属 A を入れた容器内に浸すと、抵抗は 76.8Ω に増加した。金属 A の融点を求めよ。（5 点）
- (2) 20.0°C で長さ 1.00 m 、断面積 1.00 mm^2 の白金線の電気抵抗を求めよ。（5 点）
- (3) (2)の白金に 115 mV の電圧をかけると、何 A の電流が流れるか。（5 点）
- (4) (3)の状態、白金での消費電力と 1 日の電気使用料を求めよ。ただし電気代は 19.5 円/kWh とし、有効数字 3 桁まで求めること。（10 点）

問題 1 (25 点)

- (1) 極板間にある一様な電場はガウスの法則から $E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ となるので、電位差は $V = Ex = \frac{Qx}{\epsilon_0 A}$

したがって、コンデンサーの容量は $C_0 = \frac{Q}{V} = \frac{Q\epsilon_0 A}{Qx} = \frac{\epsilon_0 A}{x}$ (6 点)

- (2) 極板を dx だけ動かすのに要する仕事は dx 変化したときの電氣的ポテンシャルエネルギーの変化分に等しい。 dx 変化したときの電氣的ポテンシャルエネルギーの変化分は

$$dW = dU = Fdx = \frac{1}{2}Q^2\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{x}} - \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{x+dx}}\right) = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}dx$$

したがって、極板に及ぼす力の大きさは $F = -\frac{dU}{dx} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$ (6 点)

- (3) 誘電体が無いときの容量は $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{x}$ 。したがって、誘電体があるときは比誘電率を κ とすると、
 $C = \frac{\epsilon_0 \kappa A}{x} = \kappa C_0$ 。(6 点)

- (4) 誘電体が無いときは $U_0 = \frac{Q^2}{2C_0}$ 。誘電体を挿入すると $U = \frac{Q^2}{2\kappa C_0} = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 \kappa A}$ 。(4 点)

$\kappa > 1$ なので、誘電体を挿入すると電氣的エネルギーは減少するが、これはコンデンサーが誘電体を引き込むのに要する仕事として作用するので減少する。(3 点)

問題 2 (25 点)

- (1) $V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_1}{2C} = V_2 + V_3 = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_2}{3C} + \frac{Q_3}{6C}$, より $3Q_1 = 2Q_2 + Q_3 = 3Q_2$, $Q_1 + Q_2 = Q_0$, $Q_2 = Q_3$. だから、

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \frac{Q_0}{2}. \quad (6 \text{ 点})$$

- (2) $V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_0/2}{2C} = \frac{Q_0}{4C}$, $V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_0/2}{3C} = \frac{Q_0}{6C}$, $V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_0/2}{6C} = \frac{Q_0}{12C}$ 。(6 点)

- (3) $U = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} + \frac{Q_3^2}{2C_3} = \frac{Q_0^2/4}{4C} + \frac{Q_0^2/4}{6C} + \frac{Q_0^2/4}{12C} = \frac{Q_0^2}{4} \frac{6}{12C} = \frac{Q_0^2}{8C}$. $U/U_0 = \frac{Q_0^2}{8C} / \frac{Q_0^2}{4C} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ 。(6 点)

- (4) $U/U_0 = \frac{1}{2} < 1$ 。(4 点)

C_1 から C_2, C_3 に電荷が移動する(電流が流れる)際に、ジュール熱や電磁波の放射が起こり、エネルギーが失われるから。(3 点)

問題 3 (25 点)

(1) 誘電体がある部分の容量を C_1 、誘電体がない部分の容量を C_2 とおくと、電荷の比は

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1 V}{C_2 V} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\frac{\kappa \epsilon_0 x l}{d}}{\frac{\epsilon_0 (l-x) l}{d}} = \frac{\kappa x}{l-x} \quad (7 \text{ 点})$$

(2) 並列合成より、コンデンサの全容量は $C = \frac{\kappa \epsilon_0 x l}{d} + \frac{\epsilon_0 (l-x) l}{d} = \frac{\epsilon_0 l \{x(\kappa-1) + l\}}{d}$ (6 点)

(3) コンデンサー全体の電氣的エネルギー U は

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 l \{x(\kappa-1) + l\}} \quad (6 \text{ 点})$$

(4) 誘電体に働く力は、

$$\begin{aligned} F &= -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left[\frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 l \{x(\kappa-1) + l\}} \right] = -\frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 l (\kappa-1)} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x + l/(\kappa-1)} \right] \\ &= \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 l (\kappa-1)} \frac{1}{\{x + l/(\kappa-1)\}^2} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 l} \frac{\kappa-1}{\{(\kappa-1)x + l\}^2} \end{aligned}$$

で、誘電体が引き込まれる方向に力が働く。 (6 点)

問題 4 (25 点)

(1)

$$R = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

$$76.8 = 50.0 \times [1 + 3.92 \times 10^{-3}(T - 20)]$$

$$\therefore T = \frac{76.8 - 50.0}{50.0 \times 3.92 \times 10^{-3}} + 20 = 157 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (5 \text{ 点})$$

$$(2) R = \rho \frac{l}{A} = (1.05 \times 10^{-7}) \left(\frac{1.00}{10^{-6}} \right) = 1.05 \times 10^{-1} \text{ } \Omega \quad (5 \text{ 点})$$

$$(3) I = \frac{V}{R} = \frac{115 \times 10^{-3}}{1.05 \times 10^{-1}} = 1.10 \text{ A} \quad (5 \text{ 点})$$

$$(4) P = \frac{V^2}{R} = \frac{0.115^2}{0.105} = 1.259 \times 10^{-1} \sim 0.126 \text{ W} \quad (5 \text{ 点})$$

$$U = 0.1259 \times 10^{-3} \times 24 \times 19.5 = 0.0589 \text{ 円} \quad (5 \text{ 点})$$