電気磁気学Ⅱ及び演習　平成30年度　実力試験Ⅰ解答例　　(2018年10月25日)(80分､100点満点)

問題１

x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ として、2 つのベクトルを $\boldsymbol{A} = \sqrt{2}\boldsymbol{i} - \sqrt{2}\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{B} = -3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ と表す。以下の小問(1)−(4)に答えよ。 (25点)

(1) $|\boldsymbol{A}|$ および $|\boldsymbol{B}|$ を求めよ。 (3+3点)　　$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{2+2} = 2, |\boldsymbol{B}| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$

(2) $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ を求めよ。 (6点)

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (\sqrt{2}\boldsymbol{i} - \sqrt{2}\boldsymbol{j}) \cdot (-3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = -3\sqrt{2}\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + 3\sqrt{2}\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} + 3\sqrt{2}\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 3\sqrt{2}.$$

(3) $\boldsymbol{A}$ ベクトルと $\boldsymbol{B}$ ベクトルのなす角 $\theta\ (0 < \theta < \pi)$ を求めよ。 (6点)

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = 2 \times 3\sqrt{2}\cos\theta = 3\sqrt{2}. \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ より、} \theta = \frac{\pi}{3} = 60°.$$

(4) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めよ。 (7点)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (\sqrt{2}\boldsymbol{i} - \sqrt{2}\boldsymbol{j}) \times (-3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = -3\sqrt{2}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + 3\sqrt{2}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} + 3\sqrt{2}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} - 3\sqrt{2}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} \\ &= -3\sqrt{2}\boldsymbol{k} - 3\sqrt{2}\boldsymbol{j} - 3\sqrt{2}\boldsymbol{i} = -3\sqrt{2}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

問題２

図のように、xy 平面上に半径 a の円弧状導体（θ の範囲：$30° \le \theta \le 90°$）があり、電流 I が流れている。x 軸の負方向に一様な磁場 $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i}B$ が存在するときの円弧状導体に作用する磁気力 $\boldsymbol{F}$ を計算することを考える。x, y, z 軸上の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ として、以下の小問(1)−(4)に答えよ。 (25点)

(1) 円弧状導体上の線素ベクトル $\boldsymbol{ds}$ の大きさ ds を求めよ。 (4点)

$ds = ad\theta.$

(2) 電流要素 $I\boldsymbol{ds}$ に作用する磁気力を $\boldsymbol{dF}$ とするとき、$\boldsymbol{dF}$ の大きさ dF を求めよ。 (7点)

$\boldsymbol{dF} = I\boldsymbol{ds} \times \boldsymbol{B}$ において、$\boldsymbol{ds}$ ベクトルと $\boldsymbol{B}$ ベクトルのなす角は、図より $\pi/2 - \theta$ なので、

$dF = IdsB\sin(\pi/2 - \theta) = IBds\sin(\pi/2)\cos\theta = IBds\cos\theta = IaB\cos\theta d\theta.$

(3) (2)の dF を θ について積分し、導体全体に作用する磁気力 $\boldsymbol{F}$ の大きさ F を求めよ。 (7点)

$$F = \int_{\pi/6}^{\pi/2} dF = IaB\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = IaB\left[\sin\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = IaB\left\{\sin(\pi/2) - \sin(\pi/6)\right\} = (1/2)IaB.$$

(4) (3)の磁気力 $\boldsymbol{F}$ の方向を単位ベクトルで表せ。 (7点)

$\boldsymbol{dF} = I\boldsymbol{ds} \times \boldsymbol{B}$ より、$\boldsymbol{F}$ の方向はベクトル積 $\boldsymbol{ds} \times \boldsymbol{B}$ の方向に等しい。$\boldsymbol{ds} \times \boldsymbol{B}$ は $+z$ 方向を向くので、$\boldsymbol{k}$ の方向である。

問題3

図(a), (b)に示すように電流 I が流れる長方形ループ（辺 ab と辺 cd は長さ l で y 軸に平行で，辺 bc と辺 da は長さ r で x 軸と角度 θ をなす場合）が，一様な磁場 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{i}$ 内におかれた場合を考える。
以下の小問(1)-(4)に答えよ。ただし，x, y, z 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする。(25 点)

(1)辺 ab および辺 cd が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける磁気力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ab}}$ および $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cd}}$ を求めよ。(7 点)

辺 ab が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける磁気力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ab}}$ は， $\underline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{ab}}=I\boldsymbol{l}_{\mathrm{ab}}\times\boldsymbol{B}=IlB(-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})=IlB(\boldsymbol{k})}$

同様に，辺 cd が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける磁気力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cd}}$ は， $\underline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{cd}}=I\boldsymbol{l}_{\mathrm{cd}}\times\boldsymbol{B}=IlB(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})=IlB(-\boldsymbol{k})}$

(2)辺 bc および辺 da が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける磁気力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{bc}}$ および $\boldsymbol{F}_{\mathrm{da}}$ を求めよ。(7 点)

辺 bc および辺 da は x 軸と角度 θ をなすので，

辺 bc が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける磁気力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{bc}}$ は， $\underline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{bc}}=I\boldsymbol{l}_{\mathrm{bc}}\times\boldsymbol{B}=IrB\sin\theta(\boldsymbol{j})}$

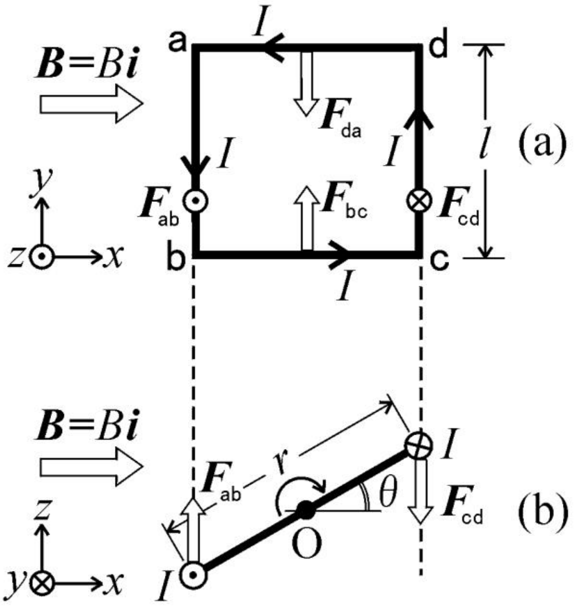
同様に，辺 da が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける磁気力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{da}}$ は， $\underline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{da}}=I\boldsymbol{l}_{\mathrm{da}}\times\boldsymbol{B}=IrB\sin(\pi-\theta)(-\boldsymbol{j})=IrB\sin\theta(-\boldsymbol{j})}$

(3)長方形ループは図(b)に示す点 O の回転軸を中心に回転する。この場合，回転方向は図(b)のように見ると時計回りか？それとも反時計回りか？(5 点)

図より，<u>時計回り</u>

(4) (3)の場合，生じるトルクの大きさを求めよ。(6 点)

$$T=\frac{r}{2}F_{\mathrm{cd}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\frac{r}{2}F_{\mathrm{ab}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{r}{2}IlB\cos\theta+\frac{r}{2}IlB\cos\theta=IlBr\cos\theta \qquad \underline{T=IlBr\cos\theta}$$



問題3の図

問題4

図に示す質量分析器を考える。極板間の電場が $\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{j}$ の速度選別器内に，質量 m，負の電荷$-q$ をもつ荷電粒子が速度 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{i}$ で進入する場合を考える。ここで，速度選別器の磁場は $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$，偏向領域の磁場は $\boldsymbol{B}_d=B_d\boldsymbol{k}$ である。以下の小問(1)–(4)に答えよ。ただし，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。(25 点)

(1)荷電粒子が偏向されることなく速度選別器を通過する場合，荷電粒子の速度 v の条件を求めよ。(6 点)

電気力 $\boldsymbol{F}_e=-qE(\boldsymbol{j})=qE(-\boldsymbol{j})$ **および磁気力** $\boldsymbol{F}_m=-qvB(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})=qvB(\boldsymbol{j})$ **より** $qE=qvB$　**よって** $\underline{v=\dfrac{E}{B}}$

(2)荷電粒子が速度選別器を通過後，偏向領域内で半円軌道を回転運動する時，到達点は図の a か b か？(5 点)

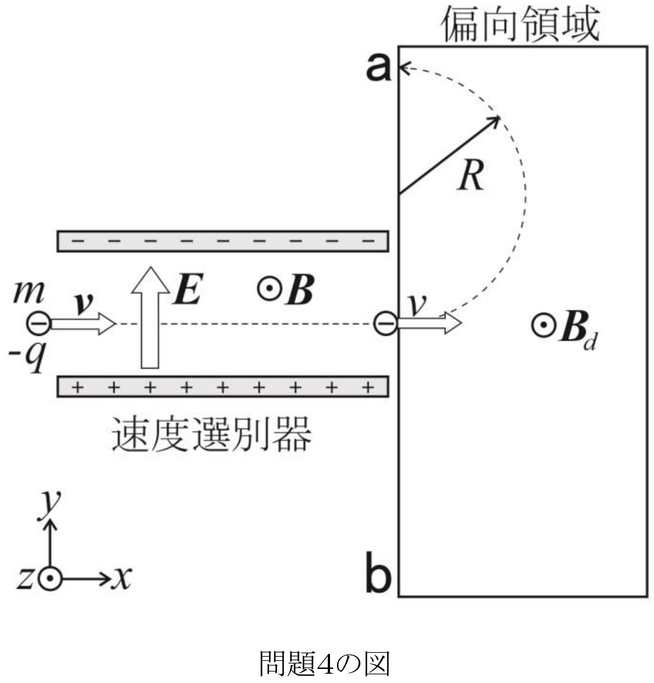
偏向領域に侵入して直後の磁気力は $\boldsymbol{F}'_m=-qvB_\mathrm{d}(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})=qvB_\mathrm{d}(\boldsymbol{j})$ **より，図の様に軌道を描くので，** **<u>到達点は a</u>**

(3)荷電粒子が偏向領域内で半円軌道を回転運動する時の軌道半径 R を求めよ。<u>ただし，答えは v を**含めない式**で表せ。</u>(7 点)

荷電粒子に作用する磁気力は回転運動の向心力であるので $qvB_\mathrm{d}=\dfrac{mv^2}{R}$ **より** $R=\dfrac{mv}{qB_\mathrm{d}}$　**よって** $\underline{R=\dfrac{mE}{qB_\mathrm{d}B}}$

(4) (3)における荷電粒子の回転周期 T（1 回転するために必要な時間）を求めよ。<u>ただし，答えは R, v を**含めない式**で表せ。</u>(7 点)

回転周期 $T=\dfrac{2\pi R}{v}=2\pi\dfrac{B}{E}\dfrac{mE}{qB_\mathrm{d}B}=\dfrac{2\pi m}{qB_\mathrm{d}}$　よって $\underline{T=\dfrac{2\pi m}{qB_\mathrm{d}}}$



問題4の図