電気磁気学Ⅱ及び演習　平成30年度　実力試験Ⅱ　解答例　　　　(2018年11月19日)(80分，100点満点)

注意：問題１，２，３，４をそれぞれ別の答案用紙に解答すること。答えだけでなく計算過程を示すこと。

問題１

図に示すようにx軸に沿って点O $(x,y)=(0,0)$から$x=\sqrt{3}L$まで延び，一定電流Iが流れる長さ$\sqrt{3}L$の細い直線状の導線を考える。点Oから$+y$軸方向に距離L離れた点Pがある。以下の小問(1)−(4)に答えよ。ただし，ベクトルの方向を示す時は，x,y,z軸方向の単位ベクトル$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$を用いること。(25点)

(1) 電流要素$I\mathrm{d}\boldsymbol{x}$から点Pまでの距離を$r$とするとき，電流要素$I\mathrm{d}\boldsymbol{x}$が点Pに作る磁場$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$の大きさ$\mathrm{d}B$を$\mathrm{d}x$と$r$を用いて表せ。ただし，電流要素$I\mathrm{d}\boldsymbol{x}$から点Pに向かう単位ベクトル$\hat{\boldsymbol{r}}$と電流要素$I\mathrm{d}\boldsymbol{x}$の間の角度を$\theta$とする。(6点)

$\left|I\mathrm{d}\boldsymbol{x}\times\hat{\boldsymbol{r}}\right| = I\mathrm{d}x\hat{r}\sin\theta = I\mathrm{d}x\sin\theta$，ビオ･サヴァールの法則より

$$\therefore \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}x\sin\theta}{r^2}$$

(2) (1)の磁場$\mathrm{d}B$をθ，$\mathrm{d}\theta$の式に変換せよ。(6点)

$\sin(\pi-\theta)=\dfrac{L}{r}$ より $r=\dfrac{L}{\sin\theta}$，　また$\tan(\pi-\theta)=\dfrac{L}{x}$ より $x=-\dfrac{L}{\tan\theta}$

ここで，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{L}{\sin^2\theta}$ より $\mathrm{d}x=\dfrac{L}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$

$$\therefore \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

(3) (2)の磁場$\mathrm{d}B$をθに関して積分し，長さ$\sqrt{3}L$の直線状導線が点Pに作る磁場$\boldsymbol{B}_{\mathrm{P}}$の大きさとその方向を求めよ。(6点)

$\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$から$\theta_2=\dfrac{5\pi}{6}$まで積分する　$B_{\mathrm{P}}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi L}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi L}\left[-\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{8\pi L}$

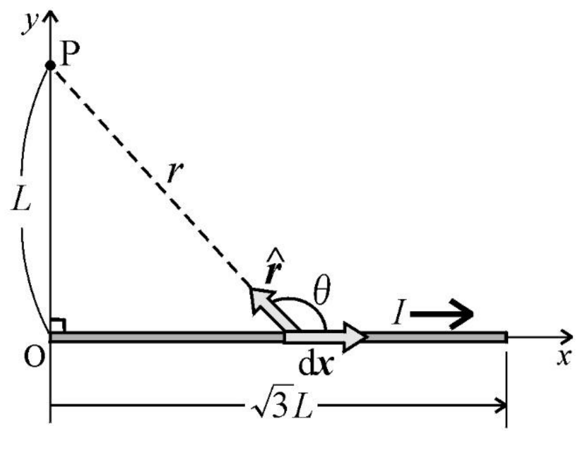
$$\therefore \boldsymbol{B}_{\mathrm{P}} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{8\pi L}(\boldsymbol{k})$$

(4) 直線状導線の長さが点Oから$x=+\infty$まで延びた場合$(0\le x<\infty)$，導線が点Pに作る磁場B_{Pi}を求めよ。(7点)

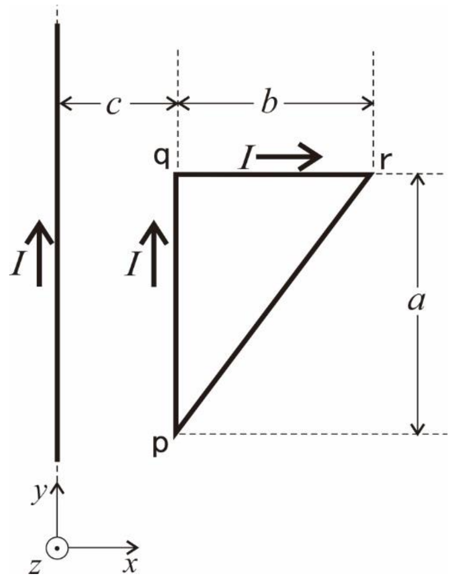
(2)の磁場$\mathrm{d}B$を$\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$から$\theta_2=\pi$まで積分する

$B_{\mathrm{Pi}}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi L}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi L}\left[-\cos(\pi)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi L}$

$$\therefore B_{\mathrm{Pi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}$$



問題１の図



問題２の図

問題２

図のように，y 軸方向に無限に長い直線導線があり，電流 I が流れている。またこの直線導線と同じ xy 平面内に直角三角形ループ(pqr)があり，これにも電流 I が流れている。直角三角形ループは直線導線に平行な辺 pq の長さが a，辺 qr の長さが b であり，辺 pq は直線導線から距離 c 離れた位置にある。真空の透磁率を μ_0 として以下の小問(1)−(4)に答えよ。ただし，ベクトルの方向を示す時は，x, y, z 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いること。(25 点)

(1) 直線導線からの距離 x（$x>0, z=0$）離れたところでの磁場 $\boldsymbol{B}$ の大きさと方向を求めよ。(7 点)

アンペールの法則より $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I$，$B(2\pi x) = \mu_0 I$

$$\therefore\ \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}(-\boldsymbol{k})$$

(2) 直線導線が作る磁場 $\boldsymbol{B}$ が，電流 I が流れる直角三角形ループの辺 pq の導線部分に作用する磁気力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{pq}}$ の大きさと方向を求めよ。(6 点)

$\boldsymbol{F}_{\mathrm{pq}} = I\,\boldsymbol{l}_{\mathrm{pq}} \times \boldsymbol{B}$　ここで，$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi c}(-\boldsymbol{k})$，$\boldsymbol{l}_{\mathrm{pq}} = a(\boldsymbol{j})$ より

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{pq}} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi c}(\boldsymbol{j}\times -\boldsymbol{k}) = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi \mathrm{c}}(-\boldsymbol{i})$$

$$\therefore \boldsymbol{F}_{\mathrm{pq}} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi c}(-\boldsymbol{i})$$

(3) 直角三角形ループの辺 qr 上では，直線導線が作る磁場は距離 x の関数となり一定ではない。辺 qr の導線上の微小要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ に作用する磁気力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{qr}}$ の大きさと方向を求めよ。(6 点)

$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{qr}} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{B}$　ここで，$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}(-\boldsymbol{k})$，$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x(\boldsymbol{i})$ より

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{qr}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi x}\mathrm{d}x(\boldsymbol{i}\times -\boldsymbol{k}) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi x}\mathrm{d}x(\boldsymbol{j})$$

$$\therefore \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{qr}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi x}\mathrm{d}x(\boldsymbol{j})$$

(4) (3)で求めた $\mathrm{d}F_{\mathrm{qr}}$ を x について線積分し，直線導線が作る磁場が辺 qr の導線部分に作用する磁気力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{qr}}$ の大きさと方向を求めよ。(6 点)

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{qr}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{qr}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\int_c^{b+\mathrm{c}} \frac{1}{x}\mathrm{d}x(\boldsymbol{j}) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\left[\ln x\right]_c^{b+c}(\boldsymbol{j}) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)(\boldsymbol{j})$$

$$\therefore \boldsymbol{F}_{\mathrm{qr}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)(\boldsymbol{j})$$

問題３

(1) 領域 $a \le x \le 2a$ における磁場の大きさ B を求めよ。(6 点)

領域 $a \le x \le 2a$ 内の半径 x の同心円を積分路 C としてアンペールの法則を適用すると、

電流密度を $J = I/(3\pi a^2)$ として、

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi x B = \mu_0 I' = \mu_0 J\pi\left(x^2 - a^2\right) = \frac{\mu_0 I}{3}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).\quad \text{ゆえに } B = \frac{\mu_0 I}{6\pi x}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

(2) 領域 $x > 2a$ における磁場の大きさ B を求めよ。(6 点)

領域 $x > 2a$ 内の半径 x の同心円を積分路 C としてアンペールの法則を適用すると、

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi x B = \mu_0 I' = \mu_0 I\ .\ \text{ゆえに } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

(3) $d\Phi_m = \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} = BdA = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x} 3a dx = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu_0 Ia}{\pi x} dx.$ (7 点)

(4) $\Phi_m = \displaystyle\int d\Phi_m = \frac{3\mu_0 Ia}{2\pi}\int_{4a}^{5a}\frac{1}{x}dx = \frac{3\mu_0 Ia}{2\pi}\left[\ln x\right]_{4a}^{5a} = \frac{3\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{5}{4}.$ (6 点)

問題４

(1)アンペールの法則より $\displaystyle\oint_C \mathbf{B}_1\cdot d\mathbf{s} = 2\pi x B_1 = \mu_0 I' = \mu_0 I$. また、方向は右ネジの法則より $-\mathbf{k}$ 方向。よって、$\mathbf{B}_1 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}\mathbf{k}$. (3+3 点)

(2) $\displaystyle\oint_C \mathbf{B}_2\cdot d\mathbf{s} = 2\pi\left(d - x\right)B_2 = \mu_0 I' = 2\mu_0 I.$ 方向は、方向は右ネジの法則より $\mathbf{k}$ 方向。

よって、$\mathbf{B}_2 = \dfrac{\mu_0 I}{\pi\left(d - x\right)}\mathbf{k}.$ (3+3 点)

(3) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}\mathbf{k} + \dfrac{\mu_0 I}{\pi\left(d-x\right)}\mathbf{k} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\dfrac{2}{d-x} - \dfrac{1}{x}\right\}\mathbf{k} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{3x-d}{x\left(d-x\right)}\mathbf{k}.$ 単位法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ の方向について、$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}$ として、

$$d\Phi_m = \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\frac{2}{d-x} - \frac{1}{x}\right\}dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\frac{2}{d-x} - \frac{1}{x}\right\}l dx.\quad \text{(6 点)}$$

(4)

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int d\Phi_m = \int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\frac{2}{d-x} - \frac{1}{x}\right\}l dx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^{d-a}\left\{\frac{2}{d-x} - \frac{1}{x}\right\}dx \\ &= \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left\{-2\ln\frac{a}{d-a} - \ln\frac{d-a}{a}\right\} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{d-a}{a}.\end{aligned}$$

(7 点)