電気磁気学Ⅱ及び演習　平成30年度　実力試験III　解答例　（2018年12月17日）

注意：問題１，２，３，４をそれぞれ別の答案用紙に解答すること。計算過程を示すこと。（80分, 100点満点）

問題１

図に示すように，断面積S，半径a，透磁率μ_m（ただし$\mu_m > \mu_0$）のトロイド形状の鉄心の一部に長さδの狭い空隙があり，導線がN回巻かれた磁気回路がある。導線には電流Iが流れている。空隙から外部への磁束の漏れは無視できるものとする。真空の透磁率をμ_0として，以下の小問(1)-(4)に答えよ。（25点）

(1) 鉄心部分の磁気抵抗R_mおよび空隙部分の磁気抵抗R_0を求めよ。（4+4点）

鉄心部分の長さは$2\pi a-\delta$なので，$R_m = \dfrac{2\pi a-\delta}{\mu_m S}$

空隙部分の長さはδなので，$R_0 = \dfrac{\delta}{\mu_0 S}$

$$\therefore R_m = \frac{2\pi a-\delta}{\mu_m S},\ R_0 = \frac{\delta}{\mu_0 S}$$

(2) 起磁力V_mを求めよ。（5点）

電流IがN回巻なので，$V_m = NI$

$$\therefore V_m = NI$$

(3) 磁気回路におけるオームの法則より磁束Φ_mを求めよ。（6点）

$V_m = (R_m + R_0)\Phi_m$より，

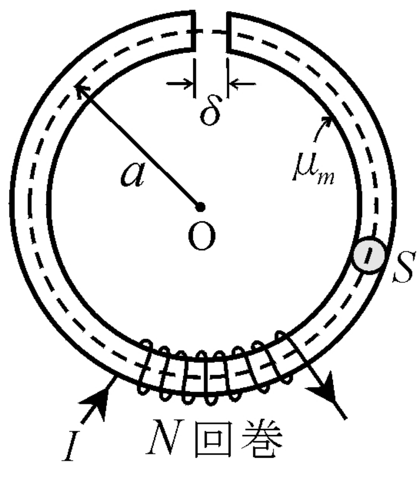
$$\Phi_m = \frac{V_m}{R_m + R_0} = \frac{NI}{\dfrac{2\pi a-\delta}{\mu_m S}+\dfrac{\delta}{\mu_0 S}} = \frac{\mu_0\mu_m SNI}{\mu_0\{2\pi a-\delta\}+\mu_m\delta}$$

$$\therefore \Phi_m = \frac{\mu_0\mu_m SNI}{\mu_0\{2\pi a-\delta\}+\mu_m\delta}$$

(4) 空隙内における磁場の強さH_0を求めよ。（6点）

$B = \mu_0 H_0 = \dfrac{\Phi_m}{S}$より，$H_0 = \dfrac{\Phi_m}{\mu_0 S} = \dfrac{\mu_m NI}{\mu_0\{2\pi a-\delta\}+\mu_m\delta}$

$$\therefore H_0 = \frac{\mu_m NI}{\mu_0\{2\pi a-\delta\}+\mu_m\delta}$$



問題１の図

問題２

図に示すように，定常電流Iの流れるx軸上の長い直線状の導線に対して，この導線と平行にある長さLの導体棒が一定速度$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{j}$で運動する。真空の透磁率を$\mu_0$として，以下の小問(1)−(4)に答えよ。

（ただし，ベクトルの方向を示す時はx, y, z軸方向の単位ベクトル$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$を用いること。）（25 点）

(1) 直線状の導線から距離y（$y>0,\ z=0,\ x$は任意）離れたところでの磁場$\boldsymbol{B}$の大きさをyの関数として求めよ。また磁場$\boldsymbol{B}$の方向も答えよ。(6 点)

アンペールの法則より　$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mu_0 I$，$B\oint \mathrm{d}s = B\,2\pi y=\mu_0 I$　　$\therefore \boldsymbol{B}(y)=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi y}\boldsymbol{k}$

(2) (1)の磁場$\boldsymbol{B}$の中を導体棒が速度$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{j}$で運動すると，導体棒中の電子は磁気力を受ける。この磁気力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$の大きさを$y$の関数として求めよ。また磁気力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$の方向も答えよ。（ただし，導体棒中の電子の電荷は$-e$とする）(7 点)

$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi y}\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}=-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=-evB\,\boldsymbol{i}=\dfrac{ev\mu_0 I}{2\pi y}[-\boldsymbol{i}]$　　$\therefore \boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}(y)=\dfrac{ev\mu_0 I}{2\pi y}[-\boldsymbol{i}]$

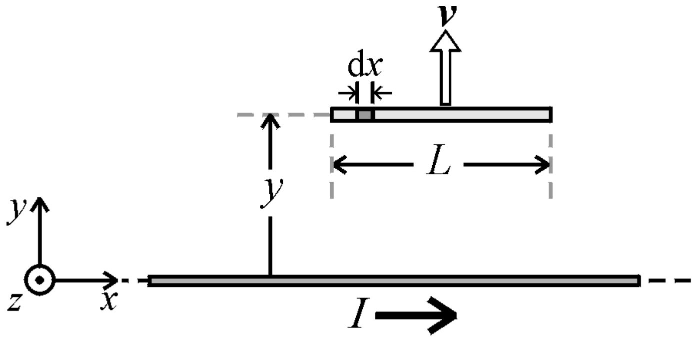
(3) (2)の磁気力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$を受けた電子は導体中で一端に移動し，その結果導体中に電場$\boldsymbol{E}$が生じる。この電場$\boldsymbol{E}$により電子は磁気力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$と逆方向の電気力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$を受け，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$とつりあった時点で電子の移動が止まる。$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$と$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$がつりあった時の電場$\boldsymbol{E}$の大きさを$y$の関数として求めよ。また電場$\boldsymbol{E}$の方向も答えよ。(7 点)

電気力は$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}=-e\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}=-\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$　$-e\boldsymbol{E}=-\dfrac{ev\mu_0 I}{2\pi y}[-\boldsymbol{i}]$　　$\therefore \boldsymbol{E}(y)=\dfrac{v\mu_0 I}{2\pi y}[-\boldsymbol{i}]$

(4) (3)で求めた電場$\boldsymbol{E}$を線積分し，導体棒に誘導される起電力εを求めよ。(5 点)

微小要素$\mathrm{d}x$に誘導される起電力$\mathrm{d}\varepsilon$の大きさは　$\mathrm{d}\varepsilon=\left|\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|=\dfrac{v\mu_0 I\mathrm{d}x}{2\pi y}$

起電力$\mathrm{d}\varepsilon$を0からLまで積分する　$\varepsilon=\int\mathrm{d}\varepsilon=\dfrac{v\mu_0 I}{2\pi y}\int_0^L \mathrm{d}x=\dfrac{v\mu_0 I}{2\pi y}L$　　$\therefore \varepsilon=\dfrac{v\mu_0 I}{2\pi y}L$



問題２の図

問題３

図に示すように，一様な磁場B（時間変化なし）の中に，左端を短絡した幅lの抵抗のない導体レールがある。そのレール上の座標$x=0$に，質量m，長さl，電気抵抗Rの棒を置く。この棒を時刻$t=0$に初速度v_0でxの正方向に滑らせた。するとレールと棒が閉回路を形成し、この閉回路を通過する磁束Φ_mが時間変化するので電磁誘導によって棒には電流が流れる。ここで，棒とレールの摩擦は無視できるものとする。時刻tにおける棒の座標をx、速度をvとし、以下の小問(1)−(4)に答えよ。(25 点)

(1) 時刻tにおいて、レールと棒で形成される閉回路を通過する磁束Φ_mを求めよ。(5 点)

$$\Phi_m = Blx.$$

(2) 時刻tにおいて、速度vで運動する棒に流れる電流の大きさIと方向を求めよ。
ただし、方向は時計回り、反時計回りで答えよ。 (6 点)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv, \quad I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{Blv}{R}.$$ 向きは、時計回り。

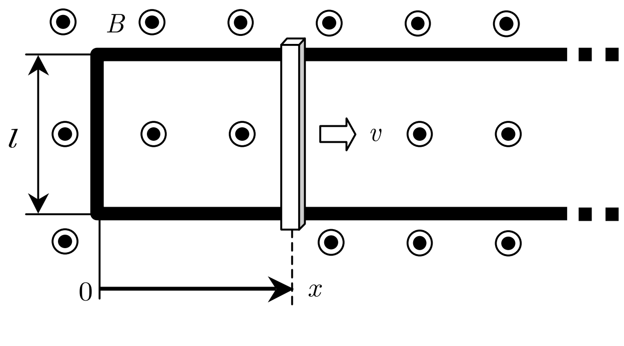
(3) 時刻tにおいて、速度vで運動する棒にはたらくx方向の磁気力F_xを求めよ。
（F_xは正負の符号を含むことに注意。）(5 点)

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} = I(-\boldsymbol{j}l)\times(\boldsymbol{k}B) = -\boldsymbol{i}IlB = \boldsymbol{i}F_x.$$ よって、$F_x = -IlB = -\dfrac{I(Bl)^2}{R}v.$

(4) 棒の運動方程式を導き、それを解くことによって、$v(t)$を求めよ。(4+5=9 点)
（運動方程式で４点、解で５点、計９点）

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{(Bl)^2}{R}v, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{(Bl)^2}{mR}v = \frac{dv}{dt} + \frac{v}{T} = 0 \quad \left(T \equiv \frac{mR}{(Bl)^2}\right).$$

上式を初期条件$v(0)=v_0$のもとで解くと、$v(t) = v_0\exp\left(-\dfrac{t}{T}\right)$と求まる。ただし、$T \equiv \dfrac{mR}{(Bl)^2}$



問題３の図

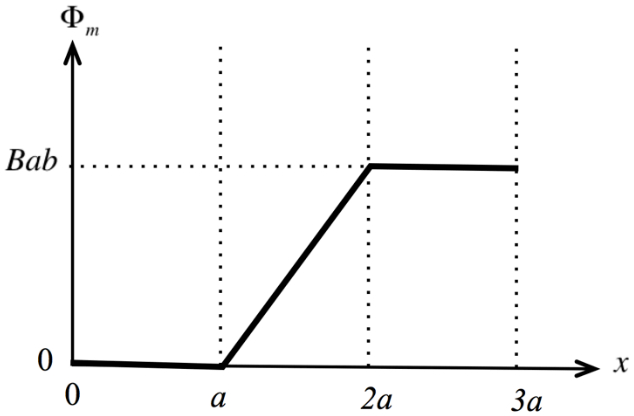
問題４

図に示すように、幅a、長さb、抵抗Rを持つ長方形ループ pqrs が$+x$ 方向に等速v で運動している。長方形ループの進む先には、$+z$ 方向の一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の領域（$x \geq a$）がある。ループの位置は､辺 pq の位置を示す x 座標で表される。真空の透磁率をμ_0 として、以下の小問(1)−(4)に答えよ。 (25 点)

(1) ループが領域Ⅰ（$0 < x < a$）、領域Ⅱ（$a < x < 2a$）および領域Ⅲ（$2a < x < 3a$）を等速v で運動するときそれぞれの領域でループを通過する磁束Φ_m を求めよ。(3x3=9 点)

領域Ⅰ：$\Phi_m = 0$,　領域Ⅱ：$\Phi_m = Bb(x-a)$,　領域Ⅲ：$\Phi_m = Bba.$

(2) 磁束Φ_m を縦軸、ループの辺 pq の位置x（$0 < x < 3a$）を横軸として、(1)の結果を図に表せ。(4 点)



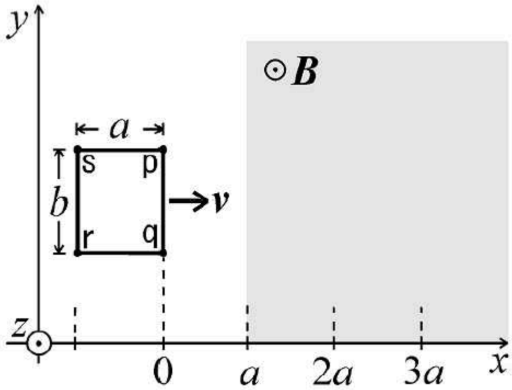
(3) ループが領域Ⅱ（$a < x < 2a$）を運動するとき、ループに流れる電流の大きさI と方向を求めよ。ただし、方向は時計回り、反時計回りで答えよ。 (3+3=6 点)

$$\left|\mathcal{E}\right| = \left|-\frac{d\Phi_m}{dt}\right| = \left|-Bbv\right| = Bbv,\quad I = \frac{\left|\mathcal{E}\right|}{R} = \frac{Bbv}{R}.\quad \text{方向は時計回り.}$$

(4) ループが領域Ⅱ（$a < x < 2a$）を運動するとき､ループの辺 pq にはたらく磁気力大きさF_m と方向を求めよ。ただし、磁気力の方向は、x, y, z 軸方向の単位ベクトル$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いて示すこと。(3+3=6 点)

$$\boldsymbol{F}_m = I\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{B} = I(-\boldsymbol{j}b) \times (\boldsymbol{k}B) = -\boldsymbol{i}IbB = -\boldsymbol{i}\frac{(Bb)^2}{R}v.$$

よって磁気力大きさ$F_m = \dfrac{(Bb)^2}{R}v$,　方向は、$-\boldsymbol{i}$ **の方向。**



問題４の図