§31.7　マクスウェルの電磁方程式（補足）

(真空中にて)	積分表現			微分表現
①ガウスの法則	$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$	(31.12)	$\Rightarrow$	$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho$
②磁気に関するガウスの法則	$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$	(31.13)	$\Rightarrow$	$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$
③ファラデーの法則	$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$	(31.14)	$\Rightarrow$	$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
④アンペール・マクスウェルの法則	$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}$	(31.15)	$\Rightarrow$	$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

上記の①～④のマクスウェルの電磁方程式を積分表現から微分表現に書き直す。

① ガウスの法則 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

ガウスの定理より $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int \mathrm{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V$ (閉曲面 A，それが囲む領域 V)

また，閉曲面の電荷の総量を Q[C]，電荷密度 ρ[C/m^3] とすれば $Q = \int \rho \mathrm{d}V$ より $\dfrac{Q}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \mathrm{d}V$

よってガウスの法則 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ は次のように書き直すことが出来る

$$\int \mathrm{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \mathrm{d}V \qquad \therefore \mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ここで電束密度 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ (真空中)を代入すると，　　$\underline{\therefore \mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \quad \cdots ①}$

② 磁気に関するガウスの法則 $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$

ガウスの定理より $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int \mathrm{div}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = 0$

よって磁気に関するガウスの法則 $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$ は次のように書き直すことが出来る

$\underline{\therefore \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \quad \cdots ②}$

③ ファラデーの法則 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\dfrac{\mathrm{d}\varPhi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$

ストークスの定理より $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ (閉曲線を周辺とする曲面 A)

また，曲面 A を通過する磁束 $\varPhi_{\mathrm{m}}$ は磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を用いて表現すると $\varPhi_{\mathrm{m}} = \int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ より $\dfrac{\mathrm{d}\varPhi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$

よってファラデーの法則 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\dfrac{\mathrm{d}\varPhi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$ は次のように書き直すことが出来る

$\int \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ $\therefore \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ ・・・③

④ アンペール・マクスウェルの法則 $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\mathrm{d}\varPhi_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}$

ストークスの定理より $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int \mathrm{rot}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$

電流を I[A] を電流密度 $\boldsymbol{J}\,[\mathrm{A/m^2}]$ で，電束 $\varPhi_{\mathrm{e}}$ を電界 $\boldsymbol{E}$ で表現すると $I = \int \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$， $\varPhi_{\mathrm{e}} = \int \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ より

$$\mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\mathrm{d}\varPhi_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} = \mu_0\int \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mu_0\left(\int \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}\right)$$

よってアンペール・マクスウェルの法則 $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\mathrm{d}\varPhi_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}$ は次のように書き直すことが出来る

$\int \mathrm{rot}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mu_0\left(\int \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}\right)$ $\therefore \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$

ここで電束密度 $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$， $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$ (真空中)を代入すると， $\therefore \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ ・・・④